ΑΣΚΗΣΕΙΣ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

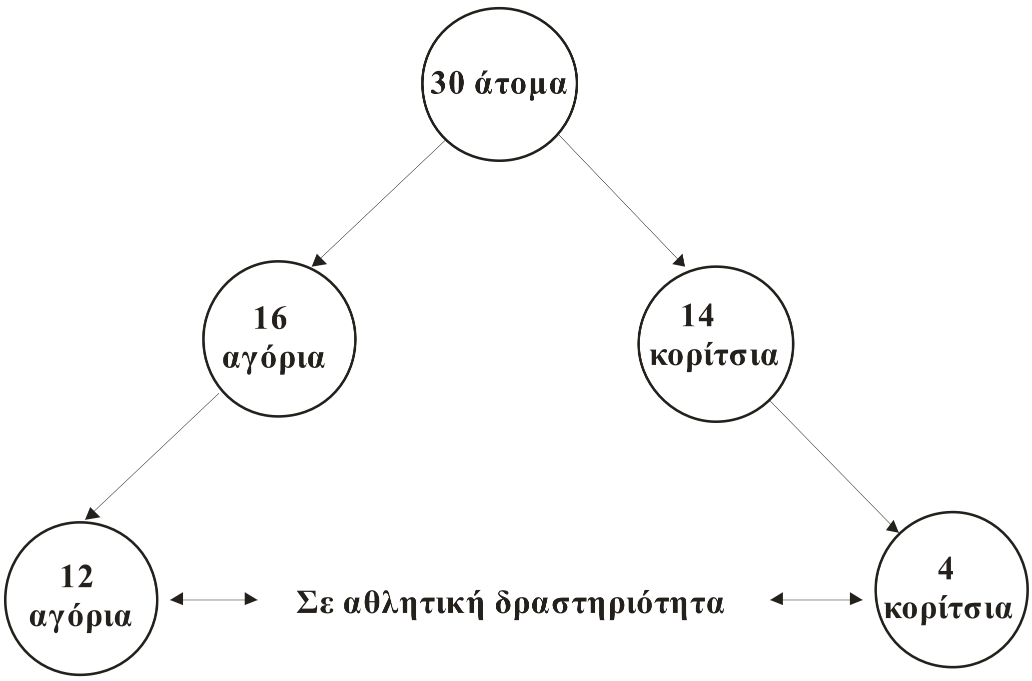
Άσκηση 1η -- Πιθανότητες

Μία τάξη έχει 16 αγόρια και 14 κορίτσια. Τα $\frac{3}{4}$ των αγοριών και τα $\frac{2}{7}$ των κοριτσιών συμμετέχουν σε κάποια αθλητική δραστηριότητα. Επιλέγουμε τυχαία ένα άτομο από την τάξη αυτή.

Να βρεθεί η πιθανότητα το άτομο που επιλέχθηκε να είναι κορίτσι ή να συμμετέχει σε αθλητική δραστηριότητα.

ΛΥΣΗ

Ορίζουμε K το ενδεχόμενο να είναι κορίτσι, A το ενδεχόμενο να είναι αγόρι και Δ το ενδεχόμενο να συμμετέχει σε αθλητική δραστηριότητα.



Τα $\frac{3}{4}$ των αγοριών συμμετέχουν σε αθλητική δραστηριότητα οπότε

$16\cdot\frac{3}{4}=12$ αγόρια. Επίσης τα $\frac{2}{7}$ των κοριτσιών συμμετέχουν σε αθλητική δραστηριότητα οπότε $14\cdot\frac{2}{7}=4$ κορίτσια.

Έστω Ω το σύνολο των παιδιών της τάξης. Η πιθανότητα το άτομο που επιλέχθηκε να είναι κορίτσι είναι: $P(K)=\frac{N(K)}{N(\Omega)}=\frac{14}{30}$.

Τα άτομα της τάξης που μετέχουν σε αθλητική δραστηριότητα είναι $12+4=16$. Η πιθανότητα το άτομο που επιλέχθηκε να συμμετέχει σε αθλητική δραστηριότητα είναι $P(\Delta)=\frac{N(\Delta)}{N(\Omega)}=\frac{16}{30}$.

Το σύνολο $K\cap\Delta$ εκφράζει το ενδεχόμενο να είναι κορίτσι και να μετέχει και σε αθλητική δραστηριότητα. Η πιθανότητα του ενδεχομένου αυτού είναι: $P(K\cap\Delta)=\frac{N(K\cap\Delta)}{N(\Omega)}=\frac{4}{30}$.

Ζητάμε την πιθανότητα το άτομο που επιλέγεται να είναι κορίτσι ή να συμμετέχει σε αθλητική δραστηριότητα δηλαδή $P(K\cup\Delta)$.

Από τον προσθετικό νόμο των πιθανοτήτων θα έχουμε:

$$P(K\cup\Delta)=P(K)+P(\Delta)-P(K\cap\Delta)=\frac{14}{30}+\frac{16}{30}-\frac{4}{30}=\frac{26}{30}.$$

Άσκηση 2η -- Πιθανότητες

Στην A' τάξη ενός λυκείου το 40% των μαθητών ασχολείται με το ποδόσφαιρο, το 30% με το μπάσκετ και το 20% με το ποδόσφαιρο και το μπάσκετ. Επιλέγουμε τυχαία ένα μαθητή.

α) Να βρείτε την πιθανότητα:

i. να μην ασχολείται με το ποδόσφαιρο,

ii. να ασχολείται με ένα τουλάχιστον από τα δύο αθλήματα,

iii. να ασχολείται με ένα το πολύ από τα δύο αθλήματα,

iv. να ασχολείται με το ποδόσφαιρο και να μην ασχολείται με το μπάσκετ,

v. να ασχολείται με το ποδόσφαιρο ή να μην ασχολείται με το μπάσκετ.

β) Αν οι μαθητές που ασχολούνται με το ποδόσφαιρο είναι κατά επτά περισσότεροι από αυτούς που ασχολούνται με το μπάσκετ, να βρείτε πόσους μαθητές έχει η A' τάξη.

ΛΥΣΗ

Έστω Ω ο δειγματικός χώρος και τα ενδεχόμενα:

Α: «Ο μαθητής να ασχολείται με το ποδόσφαιρο»

Β: «Ο μαθητής να ασχολείται με το μπάσκετ»

Οπότε $A \cap B$: «Ο μαθητής ασχολείται και με τα δύο αθλήματα».

Έχουμε

$P(A)=40\%=0,4,\quad P(B)=30\%=0,3,\quad P(A\cap B)=20\%=0,2$.

α) Η ζητούμενη πιθανότητα είναι η:

i. $P(A')=1-P(A)=1-0,4=0,6$

ii. $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0,4+0,3-0,2=0,5$

iii. $P\left((A\cap B)'\right)=1-P(A\cap B)=1-0,2=0,8$

iv. $P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)=0,4-0,2=0,2$

v. $P(A\cup B')$. Είναι $A\cup B'=(B-A)'$, οπότε

$$P(A\cup B')=P\left((B-A)'\right)=1-P(B-A)=1-\left[P(B)-P(A\cap B)\right]=$$

$$1-(0,3-0,2)=1-0,1=0,9.$$

Άρα $P(A\cup B')=0,9$.

β) Έστω $N(\Omega)=\nu$. Έχουμε

$$N(A)=N(B)+7\Leftrightarrow\frac{N(A)}{N(\Omega)}=\frac{N(B)}{N(\Omega)}+\frac{7}{N(\Omega)}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(A)=P(B)+\frac{7}{\nu}\Leftrightarrow 0,4=0,3+\frac{7}{\nu}\Leftrightarrow 0,1=\frac{7}{\nu}\Leftrightarrow \nu=70.$$

Άρα οι μαθητές της A' τάξης είναι 70.

Άσκηση 3η – Πράξεις & ιδιότητες πραγματικών αριθμών

Να βρείτε τους αριθμούς x και y για τους οποίους ισχύει:

α) $x^2+y^2=4(y-1)$

β) $x^2+y^2+2=2(x-y)$

γ) $(x+5)^2+(y-2)^2-4(x+y+1)=0$

ΛΥΣΗ

α) $x^2+y^2=4(y-1) \Leftrightarrow x^2+y^2=4y-4 \Leftrightarrow x^2+y^2-4y+4=0 \Leftrightarrow$

$x^2+(y-2)^2=0$. Γνωρίζουμε όμως από τη θεωρία ότι

$\alpha^2+\beta^2=0 \Leftrightarrow \alpha=\beta=0$. Επομένως θα έχουμε:

$x^2+(y-2)^2=0 \Leftrightarrow x=0$ και $y-2=0$. Άρα $x=0$ και $y=2$.

β) $x^2+y^2+2=2(x-y) \Leftrightarrow x^2+y^2+2=2x-2y \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2+y^2-2x+2y+2=0 \Leftrightarrow x^2-2x+1+y^2+2y+1=0 \Leftrightarrow$

$(x-1)^2+(y+1)^2=0 \quad (1)$ Για να ισχύει η σχέση (1) θα πρέπει να

είναι $x-1=0 \Leftrightarrow x=1$ και $y+1=0 \Leftrightarrow y=-1$.

γ) $(x+5)^2+(y-2)^2-4(x+y+1)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2+10x+25+y^2-4y+4-4x-4y-4=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2+6x+25+y^2-8y=0 \Leftrightarrow x^2+6x+9+y^2-8y+16=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (x+3)^2 + (y-4)^2 = 0 \quad (2)$$

Για να ισχύει η σχέση (2) θα πρέπει να είναι $x+3=0 \Leftrightarrow x=-3$

και $y-4=0 \Leftrightarrow y=4$.

Άσκηση 4η – Πράξεις & ιδιότητες πραγματικών αριθμών

α) Να αποδείξετε την ταυτότητα: $\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha-\beta)^3 + 3\alpha\beta(\alpha-\beta)$.

β) Αν ισχύει $x - \frac{1}{x} = 3$, να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$A = x^3 - \frac{1}{x^3}.$$

ΛΥΣΗ

α) Γνωρίζουμε ότι $(\alpha-\beta)^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$.

Παίρνουμε λοιπόν το δεύτερο μέλος της σχέσης που θέλουμε να αποδείξουμε και κάνοντας πράξεις θα καταλήξουμε στο πρώτο μέλος.

Είναι: $(\alpha-\beta)^3 + 3\alpha\beta(\alpha-\beta) =$

$$= \alpha^3 - \cancel{3\alpha^2\beta} + \cancel{3\alpha\beta^2} - \beta^3 + \cancel{3\alpha^2\beta} - \cancel{3\alpha\beta^2} = \alpha^3 - \beta^3.$$

Οπότε αποδείχτηκε η ζητούμενη σχέση.

β) Στην ταυτότητα που αποδείξαμε στο (α) ερώτημα αν

αντικαταστήσουμε όπου α το x και όπου β το $\frac{1}{x}$ θα έχουμε:

$$\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha-\beta)^3 + 3\alpha\beta(\alpha-\beta) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^3-\left(\frac{1}{x}\right)^3=\left(x-\frac{1}{x}\right)^3+3\cdot x\cdot\frac{1}{x}\left(x-\frac{1}{x}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^3-\frac{1}{x^3}=\left(x-\frac{1}{x}\right)^3+3\left(x-\frac{1}{x}\right)\overset{x-\frac{1}{x}=3}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow A=3^3+3\cdot 3\Leftrightarrow A=27+9\Leftrightarrow A=36.$$

Άσκηση $5^η$ – Πράξεις & ιδιότητες πραγματικών αριθμών

Αν ισχύει ότι $\alpha-\beta=2$ να αποδείξετε ότι: $\alpha^3-3\alpha^2=\beta^3+3\beta^2-4$.

ΛΥΣΗ

Ισχύει ότι $\alpha-\beta=2\Leftrightarrow \alpha=\beta+2 \quad (1)$.

Θέλουμε να αποδείξουμε ότι $\alpha^3-3\alpha^2=\beta^3+3\beta^2-4$.

Αντικαθιστούμε λοιπόν στη σχέση αυτή όπου α το $\beta+2$ από τη σχέση (1) και θα έχουμε:

$$\alpha^3-3\alpha^2=\beta^3+3\beta^2-4\overset{(1)}{\Leftrightarrow}(\beta+2)^3-3(\beta+2)^2=\beta^3+3\beta^2-4\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \beta^3+3\cdot\beta^2\cdot 2+3\cdot\beta\cdot 2^2+2^3-3\left(\beta^2+4\beta+4\right)=\beta^3+3\beta^2-4\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \beta^3+6\beta^2+12\beta+2^3-3\beta^2-12\beta-12=\beta^3+3\beta^2-4\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \beta^3+3\beta^2-4=\beta^3+3\beta^2-4$$ το οποίο ισχύει.

Άσκηση 6^{η} — Διάταξη πραγματικών αριθμών

Αν ισχύει $1<x<3$ και $2<y<4$, να βρείτε μεταξύ ποιών αριθμών περιέχεται η τιμή καθεμιάς από τις παρακάτω παραστάσεις:

α) $2x+5y$ β) $x-y$ γ) $3x-4y$ δ) $\frac{x}{y}$

ΛΥΣΗ

Γνωρίζουμε ότι ανισώσεις μπορούμε να προσθέτουμε κατά μέλη, ποτέ όμως να αφαιρούμε κατά μέλη. Μπορούμε επίσης να πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη αν όλοι οι όροι είναι θετικοί, ποτέ όμως να διαιρούμε κατά μέλη. Θα έχουμε λοιπόν:

α) $1<x<3 \overset{\cdot 2}{\Leftrightarrow} 2<2x<6 \quad (1)$

$2<y<4 \overset{\cdot 5}{\Leftrightarrow} 10<5y<20 \quad (2)$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (1) και (2) έχουμε:

$2+10<2x+5y<6+20 \Leftrightarrow 12<2x+5y<26$.

Επομένως η τιμή της παράστασης $2x+5y$ θα περιέχεται μεταξύ των αριθμών 12 και 26.

β) $1<x<3 \ (1)$

$2<y<4 \overset{\cdot(-1)}{\Leftrightarrow} -2<-y<-4$ ή $-4<-y<-2 \quad (2)$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (1) και (2) θα έχουμε:

$$\left.\begin{array}{r} 1< x < 3 \\ -4<-y<-2 \end{array}\right\} \overset{(+)}{\Leftrightarrow} -3<x-y<1.$$

Επομένως η τιμή της παράστασης $x-y$ θα βρίσκεται μεταξύ των αριθμών -3 και 1.

γ) $1<x<3 \overset{\cdot 3}{\Leftrightarrow} 3<3x<9 \quad (1)$

$2<y<4 \overset{\cdot(-4)}{\Leftrightarrow} -8<-4y<-16$ ή $-16<-4y<-8 \quad (2)$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (1) και (2) θα έχουμε:

$$\left.\begin{array}{r} 3< \ 3x<9 \\ -16<-4y<-8 \end{array}\right\} \overset{(+)}{\Leftrightarrow} -13<3x-4y<1.$$

Επομένως η τιμή της παράστασης $3x-4y$ θα βρίσκεται μεταξύ των αριθμών -13 και 1.

δ) $1<x<3 \quad (1)$

$2<y<4 \Leftrightarrow \frac{1}{2}>\frac{1}{y}>\frac{1}{4}$ ή $\frac{1}{4}<\frac{1}{y}<\frac{1}{2} \quad (2)$

Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη τις (1) και (2) θα έχουμε:

$$\left.\begin{array}{l} 1<x<3 \\ \frac{1}{4}<\frac{1}{y}<\frac{1}{2} \end{array}\right\} \overset{(\cdot)}{\Leftrightarrow} \frac{1}{4}<\frac{x}{y}<\frac{3}{2}.$$

Επομένως η τιμή της παράστασης $\frac{x}{y}$ θα βρίσκεται μεταξύ των αριθμών $\frac{1}{4}$ και $\frac{3}{2}$.

Άσκηση $7^η$ — Διάταξη πραγματικών αριθμών

Αν $\alpha+\beta=3$, δείξτε ότι:

α) $\alpha\beta \le \frac{9}{4}$

β) $\alpha^2+\beta^2 \ge \frac{9}{2}$

ΛΥΣΗ

α) Είναι: $\alpha+\beta=3 \Leftrightarrow \beta=3-\alpha$. Οπότε θα έχουμε:

$$\alpha\beta \le \frac{9}{4} \Leftrightarrow \alpha(3-\alpha) \le \frac{9}{4} \Leftrightarrow 4\alpha(3-\alpha) \le 9 \Leftrightarrow 12\alpha-4\alpha^2-9 \le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\left(4\alpha^2-12\alpha+9\right) \le 0 \Leftrightarrow -\left[(2\alpha)^2-2\cdot 2\alpha\cdot 3+3^2\right] \le 0 \Leftrightarrow$$

$-(2\alpha-3)^2 \le 0$ το οποίο ισχύει διότι $(2\alpha-3)^2 \ge 0$.

β) Είναι: $\alpha+\beta=3 \Leftrightarrow \beta=3-\alpha$. Οπότε θα έχουμε:

$$\alpha^2+\beta^2 \ge \frac{9}{2} \Leftrightarrow \alpha^2+(3-\alpha)^2 \ge \frac{9}{2} \Leftrightarrow 2\alpha^2+2\cdot(3-\alpha)^2 \ge 9 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\alpha^2+2\left(9-6\alpha+\alpha^2\right)-9 \ge 0 \Leftrightarrow 2\alpha^2+18-12\alpha+2\alpha^2-9 \ge 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4\alpha^2-12\alpha+9 \ge 0 \Leftrightarrow (2\alpha)^2-2\cdot 2\alpha\cdot 3+3^2 \ge 0 \Leftrightarrow (2\alpha-3)^2 \ge 0$$

το οποίο ισχύει.